Esercitazione 8 - Complessità

31-05-2019

Antonio Cruciani
antonio.cruciani@alumni.uniroma2.eu

Esercizi a lezione

Esercizio 1:
Si consideri il seguente problema Γ: dati un insieme $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{N}$ e un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se X non contiene alcun sottoinsieme X' tale che

$$\sum_{x \in X'} x = k$$

Formalizzare il suddetto problema Γ mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$ e rispondere alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b) Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in **CoNP**?

Esercizio 2:
Si consideri il seguente problema: dato un grafo $G = (V, E)$, decidere se G è 3-Colorabile oppure contiene un grafo completo di $|V| - 1$ nodi .
Dopo aver formalizzato il problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, se ne dimostri l'**NP**-Completezza o l'appartenenza alla classe **P**.

Esercizio 3:
k-Degree constrained spanning tree.
Dato un grafo non orientato e un intero k tale che $k \leq |V|$, decidere se esiste uno spanning tree di G nel quale nessun vertice ha un grado maggiore di k.
Si formalizzi il problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$ e lo si collochi nella sua classe classe di complessità.
HINT: Si usi k = 2.
Opzionale: Una volta risolto per k=2, si generalizzi per un k qualsiasi.

Esercizi per casa

Esercizio 1:
Si consideri i seguente problema Γ: dati un grafo $G = (V, E, w)$ orientato e pesato sugli archi con pesi qualsiasi (negativi e positivi), decidere se, in G, esiste un ciclo semplice tale che la somma dei pesi degli archi facenti parte del ciclo è pari a 0 .
Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in **CoNP**?

Esercizio 2:
Si consideri il seguente problema Γ: dati un insieme $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una collezione $T \subseteq X \times X \times X$ di triple di elementi distinti di X (ossia, per ogni $(u, v, z) \in T, u \neq v \neq z$) e un intero $k \in \mathbb{N}$. Decidere se esiste un sottoinsieme $X' \subseteq X$ di cardinalità al più k, tale che per ogni $t \in T, t \cap X' \neq \emptyset$.
Formalizzare il suddetto problema Γ mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$.
Successivamente si consideri la funzione di riduzione f che trasforma istanze $\langle G = (V, E), k \rangle$ del problema VERTEX COVER in istanze di Γ tale che $f(G, k) = \langle X, T, k \rangle$ con $X = V \cup E$ e $T = \{(u, v, e) : u \in V \wedge v \in V \wedge e = (u, v) \in E\}$ e si dimostri che f è una riduzione polinomiale dal problema VERTEX COVER al problema Γ.

Soluzioni esercizi a lezione

Esercizio 1:
Formalizziamo il problema, che chiameremo Γ mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$:

$$\begin{aligned}
&I_\Gamma = \{\langle A, k\rangle : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}\}\\
&S_\Gamma(A,k) = \{A' \subseteq A\}\\
&\pi_\Gamma(A, k, S_\Gamma(A,k)) = \forall A' \in S_\Gamma(A,k) : \sum_{a_i \in A'} a_i \neq k
\end{aligned}$$

Il problema è in **CoNP** e inoltre è completo per tale classe di complessità. Per dimostrarlo seguiamo il seguente schema :

1) Formalizziamo il complemento di Γ
2) Dimostriamo l'appartenenza di Γ^c alla classe **NP**
3) Dimostriamo la completezza per **NP** del problema Γ^c mediante un'opportuna riduzione polinomiale da un problema **NPC** noto.
4) Poiché $\Gamma^c \in$ **NPC** allora $\Gamma \in$ **CoNPC**.

Passiamo a Γ^c

$$\begin{aligned}
&I_{\Gamma^c} = \{\langle A, k\rangle : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}\}\\
&S_{\Gamma^c}(A,k) = \{A' \subseteq A\}\\
&\pi_{\Gamma^c}(A, k, S_{\Gamma^c}(A,k)) = \sim [\forall A' \in S^c_\Gamma(A,k) : \sum_{a_i \in A'} a_i \neq k]
\end{aligned}$$

osserviamo che il predicato diventa:

$$\pi_{\Gamma^c}(A, k, S_{\Gamma^c}(A,k)) = \exists A' \in S_{\Gamma^c}(A,k) : \textstyle\sum_{a_i \in A'} a_i = k$$

Mostriamo l'appartenenza di Γ^c alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza A,k è un sottoinsieme A' di A il quale ha lunghezza **O**(|A|), inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_{\Gamma^c}(A, k, S_{\Gamma^c}(A,k)) = \textstyle\sum_{a_i \in A'} a_i = k$$

e tale verifica può essere fatta in **O**(|A|), quindi il problema è in **NP**.

Quindi abbiamo mostrato che il problema appartiene a **NP**. Mostriamo che inoltre il problema è completo per **NP**, a tale scopo mostriamo una riduzione polinomiale dal problema PARTIZIONE che sappiamo essere **NP**-Completo. Ricordiamo il problema PARTIZIONE:

$$I_{Partizione} = \{\langle A\rangle : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}\}$$
$$S_{Partizione}(A) = \{A' \subseteq A\}$$
$$\pi_{Partizione}(A, S_\Gamma(A)) = \exists A' \in S_{Partizione}(A) : \sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_j \in A-A'} a_j$$

Osservazione fondamentale:

$$\textstyle\sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_j \in A-A'} a_j = \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a$$

Sia ϕ la funzione di riduzione polinomiale che trasforma un' istanza di PARTIZIONE in una istanza di Γ^c. Sia $\langle A\rangle$ un'istanza di PARTIZIONE ad essa facciamo corrispondere un' istanza $\langle A, k = \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a\rangle$ di Γ^c

$$\langle A\rangle \xrightarrow{\phi} \langle A, k = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{a\in A} a\rangle$$

Osserviamo esplicitamente che $\phi \in \mathbf{FP}$

E' facile osservare che:

$$\exists \text{ istanza si di PARTIZIONE} \iff \exists \text{ istanza si di } \Gamma^c$$

Dimostriamolo:
Sia $\langle A\rangle$ un'istanza si di PARTIZIONE, questo significa che esiste un un sottoinsieme A' di A tale che $\sum_{a_i\in A'} a_i = \sum_{a_j \in A-A'} a_j$. Ora sfruttando l'osservazione fatta precedentemente possiamo dire, banalmente, che tale sottoinsieme induce un'istanza si in Γ^c (poiché abbiamo $k = \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a$).
Sia ora $\langle A, k = \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a\rangle$ un' istanza si di Γ^c, ovvero esiste un $A' \subseteq A$ la quale somma degli elementi di A' è esattamente k, osserviamo che tale A' è anche un'istanza si di PARTIZIONE in quanto $\sum_{a_i\in A'} a_i = \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a = \sum_{a_j\in A-A'} a_j$.
Quindi possiamo concludere che Γ^c è **NP**-Completo.

Abbiamo quindi dimostrato che $\Gamma^c \in$ **NPC** allora possiamo concludere che $\Gamma \in$ **CoNPC** Quindi, dopo questa dimostrazione di completezza per **NP** possiamo concludere l'esercizio rispondendo alle domande (ricordando le due congetture fondamentali della complessità computazionale):

c) Si ed è completo per **CoNP**

a) No, in quanto se fosse in **P** allora avremmo che **P=NP**

b) No in quanto se fosse in **NP** avremmo che **CoNP=NP**

Esercizio 2:
Formalizziamo il problema, che chiameremo $\mathbb{A}$ mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$:

$$I_{\mathbb{A}} = \{\langle G = (V, E)\rangle : \text{ G È UN GRAFO NON ORIENTATO}\}$$
$$S_{\mathbb{A}}(G) = \{\langle V', c\rangle : V' \subseteq V \wedge c : V \to \{1, 2, 3\}\}$$
$$\pi_{\mathbb{A}}(G, S_{\mathbb{A}}(G)) = \exists \langle V', c\rangle \in S_{\mathbb{A}}(G) : \{\forall (u, v) \in E[c(u) \neq c(v)]\} \vee \{|V'| = |V| - 1 \wedge \forall u, v \in V'[(u, v) \in E]\}$$

Mostriamo l'appartenenza del problema a **NP**.
Un certificato per un'istanza G=(V,E) è una coppia $\langle V', c\rangle$ ovvero un sottoinsieme V' di V e una funzione c che colora i nodi di V con i colori 1,2,3. Tale certificato ha lunghezza $\mathbf{O}(|\mathrm{G}|)$, inoltre verificare se un certificato è una soluzione effettiva, significa verificare

$$\eta_{\mathbb{A}} = \{\forall (u, v) \in E[c(u) \neq c(v)]\} \vee \{|V'| = |V| - 1 \wedge \forall u, v \in V'[(u, v) \in E]\}$$

e tale verifica può essere fatta in $\mathbf{O}(|E||V|^2)$, quindi il problema è in **NP**.
Mostriamo che il problema è completo per **NP** mediante un'opportuna riduzione polinomiale dal problema 3COL.
Sia ϕ la funzione di riduzione polinomiale che trasforma istanze di 3COL in istanze del nostro problema $\mathbb{A}$. Essa opererà come segue:
Data un'istanza $I_{3COL}\langle G = (V, E)\rangle$ $\phi(G) = \langle G' = (V', E')\rangle$ dove:

- V' $= V \cup \{x, y, z, w, u\}$
- E' $= E \cup \{(x, y), (y, z), (z, w), (w, u)(u, x)\}$

ϕ non fa altro che aggiungere un ciclo di 5 nodi all'istanza originale di 3COL.

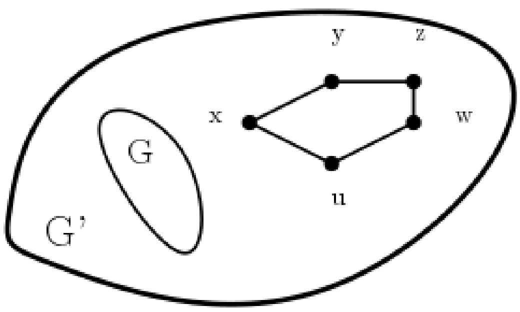

Figura 1: Esempio di istanza trasformata dalla funzione $\phi(G)$

Sia $\langle G = (V, E)\rangle$ un'istanza si di 3COL allora significa che esiste una 3 colorazione valida di G, osserviamo che in G' tale 3 colorazione è ancora valida poiché possiamo 3 colorare il ciclo e lasciare la 3 colorazione dei restanti nodi come nell'istanza di 3COL valida.
Sia, ora $\langle G = (V, E)\rangle$ un'istanza no di 3COL, allora non esiste nessuna 3 colorazione valida per G. Osserviamo che è un'istanza no anche per G' in quanto anche in G' non esiste una 3 colorazione valida dei nodi che non appartengono al ciclo indotto dai nodi (x,y,z,w,u) e inoltre G' non contiene un grafo completo di $|V'| - 1$ nodi in quanto il ciclo che abbiamo aggiunto fa si che questa condizione non si verifichi mai.
Osserviamo, infine che $\phi \in FP$.
Abbiamo quindi dimostrato che $\mathbb{A} \in$ **NPC**

Esercizio 3:

$I_\Gamma = \{\langle G = (V, E), k\rangle :$ G È UN GRAFO NON ORIENTATO $\wedge\, k \in \mathbb{N}[k \leq |V|]\}$
$S_\Gamma(G, k) = \{G' = (V', E') : V' = V \wedge E' \subseteq E \wedge |E'| = |V| - 1\}$
$\pi_\Gamma(G, k, S_\Gamma(G, k)) = \exists G' \in S_\Gamma(G, k) : \forall u \in V'[|N'(u)| \leq k]$

Nota: sia $u \in V$, $N'(u) = \{v \in V : (u, v) \in E'\}$.

Appartenenza alla classe **NP**:
Un certificato per una istanza G=(V,E),k è un sottografo G' il quale induce un albero ricoprente di G il quale ha lunghezza **O**(|G|), inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_\Gamma(G, k, S_\Gamma(G, k)) = \forall u \in V'[|N'(u)| \leq k]$$

e tale verifica può essere fatta in **O**(|V|), quindi il problema è in **NP**.

Prova di **NP-Completezza**:
Dimostriamo la completezza del problema per la classe **NP** mediante una riduzione polinomiale dal problema *Hamiltonian Path* (in breve HP) il quale è completo per NP.
(Per prima cosa dimostriamo la completezza del problema per k=2 e poi per $k \geq 2$):
Sia $\langle G = (V, E), u, v\rangle$ una istanza di HP ad essa facciamo corrispondere una istanza $\langle G = (V, E), k = 2\rangle$ di Γ.
Sia ora, $\langle G = (V, E), u, v\rangle$ una istanza si di di HP, allora esiste un percorso da u a v che passa per tutti i nodi di G una ed una sola volta, osserviamo che tale percorso induce un albero ricoprente $G' = (V', E')$ dove $\forall u \in V'[|N(u)| \leq k]$

(k=2) e quindi è anche una istanza si di Γ.
Se invece $\langle G = (V, E), k = 2\rangle$ è una istanza si di Γ allora significa che esiste un albero ricoprente di G dove ogni nodo dell'albero ha $|N(u)| \leq k$ (k=2), poiché è un albero, ed ogni nodo (nell'albero) ha grado (numero di vicini) minore o uguale di 2, esistono due nodi i quali hanno grado esattamente uguale a 1 e quindi, siano x,y tali nodi, definendo come $u = x \wedge v = y$ otteniamo un'istanza si di HP. Quindi $\Gamma \in \boldsymbol{NPC}$.

Generalizziamo la nostra dimostrazione di NP-Completezza per un k generico (chiaramente ≥ 1), mostriamo sempre una riduzione dal problema HP. Sia $\langle G = (V, E), u, v\rangle$ una istanza di HP, definiamo ϕ la funzione che trasforma l'istanza di HP in una istanza di Γ

$$\langle G = (V, E), u, v\rangle \xrightarrow{\phi} \langle G' = (V', E'), k\rangle$$

Dove $G' = (V'E')$ è definito come segue: ad ogni nodo $u \in V$ colleghiamo k-2 nodi gadget , formalmente:

- $V' = V \cup \{\bigcup_{u \in V}\{x_{u,1}, x_{u,2}, \ldots x_{u,k-2}\}\}$
- $E' = E \cup \{(u, x_{u,i}) : u \in V \wedge \forall 1 \leq i \leq k-2\}$

Osserviamo esplicitamente che $\phi \in \mathbf{FP}$.
E' facile osservare che:
il nuovo grafo contiene un k-Degree constrained spanning tree $\iff$ Il grafo originale contiene un HP.
Mostriamolo:

Sia $\langle G = (V, E), u, v\rangle$ una istanza si di HP allora in $< G' = (V', E'), k >$ esisterà uno spanning tree con i nodi di grado al più k e quindi è una istanza si di Γ.
Sia $\langle G = (V, E), u, v\rangle$ una istanza no di HP allora in $< G' = (V', E'), k >$ non esisterà uno spanning tree che soddisfa il predicato, in quanto se G=(V,E) è un grafo disconnesso G=(V',E') sarà anch'esso disconnesso, se invece il grafo è connesso e non contiene un HP, abbiamo che in un nodo "passiamo" più volte, ovvero, equivalentemente avremo uno spanning tree dove esiste un nodo con grado superiore a 2. Applicando,ora, ϕ a tale istanza no di HP otteniamo un nuovo grafo dove tutti i nodi hanno il proprio grado maggiorato di $k-2$, e quindi se in G esisteva un nodo dove passavamo più di una volta in G' esso avrà grado superiore a k e quindi è una istanza no di Γ.
E quindi $\Gamma \in \boldsymbol{NPC}$.

Soluzioni esercizi per casa

Esercizio 1:
Formalizziamo il problema Γ:

$$\begin{aligned}
&I_\Gamma = \{\langle G = (V, E, w)\rangle : \text{ G \textsc{è un grafo orientato} } \wedge w : E \to \mathbb{Z}\}\\
&S_\Gamma(G) = \{p = \langle u_1, u_2, \ldots, u_j\rangle : \{u_1, u_2, \ldots, u_j\} \subseteq V\}\\
&\pi_\Gamma(G, S_\Gamma(G)) = \exists p \in S_\Gamma(G) : \forall 1 \leq i \leq j-1[(p_i, p_{i+1}) \in E] \wedge (p_j, p_1) \in E\\
&\qquad\qquad \wedge \forall i \geq 1, h \leq j[i \neq j \to p_i \neq p_j] \wedge \sum_{e \in p} w(e) = 0
\end{aligned}$$

Mostriamo l'appartenenza di Γ alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza G è un sottoinsieme $\{u_1, \ldots u_j\}$ di V il quale ha lunghezza **O**(|V|), inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\begin{aligned}
\eta_\Gamma(G, S_\Gamma(G)) = \forall 1 \leq i \leq j-1[(p_i, p_{i+1}) \in E] \wedge (p_j, p_1) \in E\\
\wedge \forall i \geq 1, h \leq j[i \neq j \to p_i \neq p_j] \wedge \sum_{e \in p} w(e) = 0
\end{aligned}$$

e tale verifica può essere fatta in **O**(|E||V|), quindi il problema è in **NP**.

Quindi abbiamo mostrato che il problema appartiene a **NP**. Mostriamo che inoltre il problema è completo per **NP**, a tale scopo mostriamo una riduzione polinomiale dal problema Subset Sum che sappiamo essere **NP**-Completo.
Sia ϕ la funzione di riduzione polinomiale che trasforma un' istanza di Subset Sum (Ovvero una coppia insieme di elementi, i quali possono avere un peso positivo o negativo e un intero) in una istanza di Γ.
In questo caso $k = 0$.
Dimostriamo l'appartenenza a **NPC** del problema Subset Sum per il caso $k = 0$, per fare questo mostriamo una riduzione da Partizione che sappiamo essere completo per **NP**
Per chiarezza formalizziamo il problema, dimostrando l'appartenenza a **NP** e la sua completezza:

$$\begin{aligned}
&I_{\text{SSS}} = \{\langle A, k = 0\rangle : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z} \wedge k \in \mathbb{N}\}\\
&S_{\text{SSS}}(A, k) = \{A' \subseteq A\}\\
&\pi_{\text{SSS}}(A, k, S_{\text{SSS}}(A, k)) = \exists A' \in S_{\text{SSS}}(A, k) : \sum_{a_i \in A'} a_i = k = 0
\end{aligned}$$

Mostriamo l'appartenenza di SUBSET SUM alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza A,k è un sottoinsieme A' di A il quale ha lunghezza $\mathbf{O}(|\mathrm{A}|)$, inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_{\mathrm{SSS}}(A, k, S_\Gamma(A, k)) = \textstyle\sum_{a_i \in A'} a_i = k = 0$$

e tale verifica può essere fatta in $\mathbf{O}(|\mathrm{A}|)$, quindi il problema è in **NP**.

Quindi abbiamo mostrato che il problema appartiene a **NP**. Mostriamo che inoltre il problema è completo per **NP**, a tale scopo mostriamo una riduzione polinomiale dal problema PARTIZIONE che sappiamo essere **NP**-Completo.
Ricordiamo il problema PARTIZIONE:

$$I_{Partizione} = \{\langle A \rangle : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}\}$$
$$S_{Partizione}(A) = \{A' \subseteq A\}$$
$$\pi_{Partizione}(A, S_\Gamma(A)) = \exists A' \in S_{Partizione}(A) : \sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_j \in A - A'} a_j$$

Sia f la funzione di riduzione polinomiale che trasforma un' istanza di PARTIZIONE in una istanza di SUBSET SUM. Sia $\langle A \rangle$ un'istanza di PARTIZIONE ad essa facciamo corrispondere un' istanza $\langle A', k \rangle$ di SUBSET SUM.
Dove :

- $A' = A \cup \{-\frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} a_i\}$
- $k = 0$

$$\langle A \rangle \xrightarrow{f} \langle A', k = 0 \rangle$$

Osserviamo esplicitamente che $f \in \mathbf{FP}$
Osservazione fondamentale:

$$\textstyle\sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_j \in A - A'} a_j = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} a \rightarrow \sum_{a_i \in A'} a_i - \frac{1}{2} \sum_{a \in A} a = 0$$

E' facile osservare che:

$$\exists \text{ istanza si di } \textsc{Partizione} \iff \exists \text{ istanza si di } \textsc{Subset Sum}$$

Dimostriamolo:
Sia $\langle A \rangle$ un'istanza si di PARTIZIONE, questo significa che esiste un un sottoinsieme A' di A tale che $\sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_j \in A - A'} a_j$. Ora sfruttando l'osservazione fatta precedentemente possiamo dire, banalmente, che tale sottoinsieme

$A' \cup \{-\frac{1}{2}\sum_{a\in A} a\}$ induce un'istanza si in SUBSET SUM in quanto abbiamo che $\frac{1}{2}\sum_{a\in A} a - \frac{1}{2}\sum_{a\in A} a = k = 0$.
Sia ora $\langle A', k\rangle$ un' istanza si di SUBSET SUM, ovvero esiste un $A' \subseteq A$ la quale somma degli elementi di A' è esattamente k (in questo caso 0), osserviamo che tale $A'' = A' - \{-\frac{1}{2}\sum_{a\in A} a\}$ è anche un'istanza si di PARTIZIONE in quanto $\sum_{a_i\in A''} a_i = \frac{1}{2}\sum_{a\in A-\{-\frac{1}{2}\sum_{a\in A} a\}} a = \sum_{a_j\in A-A'} a_j$.
Quindi possiamo concludere che SUBSET SUM è **NP**-Completo.
Dopo questa breve dimostrazione, mostriamo una riduzione polinomiale dal problema SUBSET SUM al problema Γ. Sia $\langle X, k\rangle$ un'istanza di SUBSET SUM ad essa facciamo corrispondere un' istanza $\langle G\rangle$ di Γ

$$\langle X, k\rangle \xrightarrow{\phi} \langle G\rangle$$

Dove G=(V,E,w) è definito come segue:

- $V = \{u_j, v_j \ : \ x_j \in X\}$
- $E = \{(u_i, v_i)\} \cup \{(v_j, v_i)\} \cup \{(v_i, u_j)\}$
- $\forall 1 \leq i, j \leq n, \ w(u_i, v_j) = \begin{cases} x_j & \text{SE } i = j \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

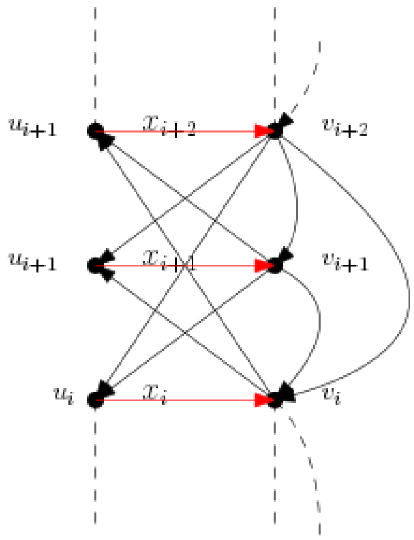

Figura 2: Esempio della costruzione del grafo: gli archi rossi $\forall u_i, v_i \in V$ hanno peso x_i e gli archi neri hanno tutti peso 0

Osserviamo esplicitamente che $\phi \in$ **FP**
E' facile osservare che:

$$\exists \text{ istanza si di } \textsc{Subset Sum} \iff \exists \text{ istanza si di } \Gamma$$

Dimostriamolo:
Sia $\langle X, k\rangle$ un'istanza si di Subset Sum, questo significa che esiste un un sottoinsieme X' di X tale che $\sum_{x_i \in X'} = k = 0$. Allora in G esisterà un ciclo di lungezza 0, il quale sarà composto dalle coppie u_i, v_i che corrispondono agli elementi del sottoinsieme X'. Ogni coppia u_i, v_i sarà connessa da un arco $(u_i, v_i) : w(u_i, v_i) = x_i$ e le coppie saranno connesse fra di loro con gli archi di peso 0. Quindi abbiamo un'istanza si di Γ.
Sia, ora, $\langle G\rangle$ un'istanza si di Γ, ovvero esiste un ciclo semplice di peso 0. E' chiaro che, la somma dei pesi degli archi (u_i, v_i) dev'essere 0, questi archi (u_i, v_i) inducono un sottoinsieme $X' \subseteq X$ in Subsett Sum la somma dei cui elementi è pari a 0 e quindi induce un'istanza si di Subset Sum .

Quindi possiamo concludere che Γ è **NP**-Completo.
Quindi, dopo questa dimostrazione di completezza per **NP** possiamo concludere l'esercizio rispondendo alle domande (ricordando le due congetture fondamentali della complessità computazionale):

b) Si ed è completo per **NP**

a) No, in quanto se fosse in **P** allora avremmo che **P=NP**

c) No in quanto se fosse in **CoNP** avremmo che **coNP=NP**

Esercizio 2:
Formalizziamo il problema, che chiameremo Γ mediante la tripla $\langle I, S, \pi\rangle$:

$I_\Gamma = \{\langle X, T, k\rangle : X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \wedge T \subseteq X \times X \times X \wedge k \in \mathbb{N}\}$
$S_\Gamma(X, T, k) = \{X' \subseteq X\}$
$\pi_\Gamma(X, T, k, S_\Gamma(X, T, k)) = \exists X' \in S_\Gamma(X, T, k) : |X| \leq k \wedge \forall t \in T[t \cap X' \neq \emptyset]$

Per essere precisi, mostriamo, velocemente l'appartenenza del problema Γ alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza X,T,k è un sottoinsieme X' di X il quale ha lunghezza $\mathbf{O}(|\mathrm{X}|)$, inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_\Gamma(X, T, k, S_\Gamma(X, T, k)) = |X| \leq k \wedge \forall t \in T[t \cap X' \neq \emptyset]$$

e tale verifica può essere fatta in $\mathbf{O}(|X|\ |T|)$, quindi il problema è in **NP**.

Ora, verifichiamo se la funzione di riduzione polinomiale f è una riduzione effettiva dal noto problema Vertex Cover.

Per essere una riduzione valida essa deve trasformare istanze del problema VC in istanze del problema Γ, in modo tale che se esiste un'istanza si di VC allora abbiamo un'istanza si di Γ e viceversa.
Inoltre $f \in \mathbf{FP}$, precisiamo che quest'ultimo "requisito" non è banale e va verificato per poter concludere se una data riduzione è valida o meno.

Ritorniamo al nostro problema, è stata fornita la seguente funzione di riduzione f:
Data un'istanza di Vertex Cover $I_{VC} = \langle G = (V, E), k \rangle$ $f(G.k) = \langle X, T, k \rangle$ dove:

- $X = V \cup E$
- $T = \{(u, v, e) : u \in V \wedge v \in V \wedge e = (u, v) \in E\}$
- k rimane lo stesso

Per prima cosa verifichiamo se $f \in \mathbf{FP}$: osserviamo che un metodo Naïve per costruire la nuova istanza $\langle X, T, k \rangle$ ha una complessità computazionale di $\mathbf{O}(|V|^2)$ quindi $f \in \mathbf{FP}$.
Ora verifichiamo se è effettivamente una riduzione polinomiale valida.
Sia $\langle G, k \rangle$ un'istanza si di Vertex Cover allora significa che esiste un sottoinsieme V' di V che induce un ricoprimento dei vertici di dimensione al più k, ovvero:

$$\forall (u, v) \in E \ [u \in V' \vee v \in V'] \wedge |V'| \leq k$$

Osserviamo che in $I_\Gamma \langle X, T, k \rangle$ l'insieme $X = V \cup E$, allora sia $X' \subseteq X$ proprio l'insieme dei nodi che in V inducevano il Vertex Cover $(X' = V')$ osserviamo che per come è costruito T abbiamo sempre che ogni tripla di T conterrà un elemento di X', inoltre $|X'| = |V'| \leq k$ quindi è un'istanza si di Γ.
Sia ora $I_{VC}\langle G, k \rangle$ un'istanza No, allora significa che non esiste un Vertex Cover in G di dimensione al più k quindi in I_Γ non riusciamo a scegliere nessun $X' \subseteq X : |X| \leq k \wedge \forall t \in T \ [X' \cap t \neq \emptyset]$ avremo sempre che per qualsiasi sottoinsieme X' di dimensioni al più k esisterà almeno una tripla $\alpha \in T$ per la quale si avrà intersezione vuota, ovvero $X' \cap \alpha = \emptyset$ e quindi è anch'essa un'istanza no di Γ.
Quindi possiamo concludere che f è una riduzione valida dal problema Vertex Cover e che quindi $\Gamma \in \mathbf{NPC}$